

Digitalfilter für Sigma-Delta-Modulatoren ($\Sigma\Delta$)

Von Guido Nopper

Zusammenfassung

Es werden einfache d.h. aufwandsarme digitale Tiefpassfilter vorgestellt, bei denen die Einfachheit im Wesentlichen durch den Verzicht auf echte Multiplikation erzielt wird. Die echten Multiplikationen werden durch die Verwendung von „look up“ Tabellen (LUT) oder durch das Verschieben von Binärstellen umgangen.

FIR Tiefpassfilter

Das nachfolgende Filter dürfte wohl das am häufigsten eingesetzte für $\Sigma\Delta$ sein. Grundlage ist ein (M-1)stufiges 1 Bit breites Schieberegister mit parallelem Ausgang. Die Bits an diesem Ausgang werden aufaddiert, wodurch sich eine gleitende Mittelwertbildung (moving-average bzw. running-average) ergibt (Fig.01).

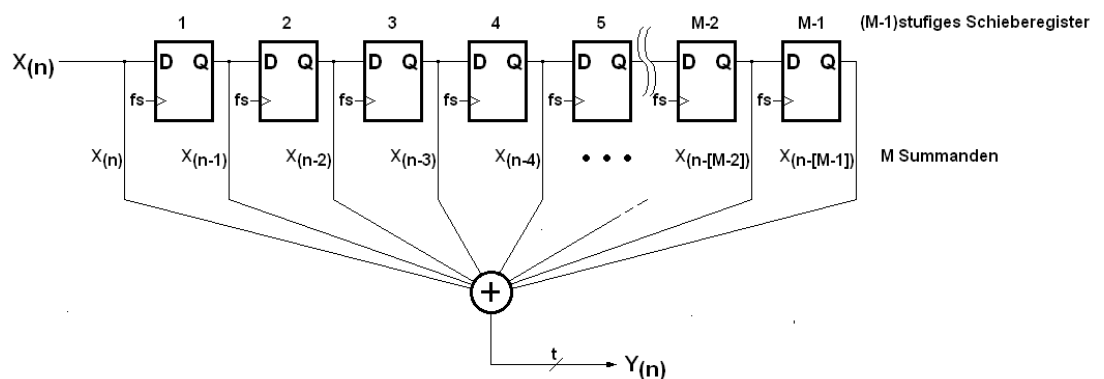


Fig. 01

Zwischen Ausgang und Eingang besteht im Zeitbereich folgender Zusammenhang:

$$y_{(n)} = x_{(n)} + x_{(n-1)} + x_{(n-2)} + x_{(n-3)} + x_{(n-4)} + \dots + x_{(n-[M-2])} + x_{(n-[M-1])} .$$

Um in den Bildbereich zu wechseln ist die z-Transformation [1] anzuwenden:

$$Z_{\{y_{(n)}\}} = Z_{\{x_{(n)}\}} + z^{-1} \cdot Z_{\{x_{(n)}\}} + z^{-2} \cdot Z_{\{x_{(n)}\}} + z^{-3} \cdot Z_{\{x_{(n)}\}} + z^{-4} \cdot Z_{\{x_{(n)}\}} + \dots + z^{-[M-2]} \cdot Z_{\{x_{(n)}\}} + z^{-[M-1]} \cdot Z_{\{x_{(n)}\}} ,$$

$$Z_{\{y_{(n)}\}} = Z_{\{x_{(n)}\}} \cdot \left\langle 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-[M-2]} + z^{-[M-1]} \right\rangle .$$

Die z-Übertragungsfunktion $H_{(z)}$ des Filters ist definiert als die z-Transformierte der Ausgangsfolge dividiert durch die z-Transformierte der Eingangsfolge

$$H_{(z)} = \frac{Z_{\{y_{(n)}\}}}{Z_{\{x_{(n)}\}}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-[M-2]} + z^{-[M-1]} .$$

Mit der Summenformel für Geometrische Reihen [2]

$$1 + V^1 + V^2 + V^3 + V^4 + \dots + V^{[M-1]} = \frac{1 - V^M}{1 - V} \quad \text{und} \quad V = z^{-1}$$

ergibt sich $H(z)$ zu

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \quad (1)$$

Etwas umgeformt wird daraus:

$$H(z) = (1 - z^{-M}) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (2)$$

Im ersten Term von (2) ist eine Differenzbildung von 2 im Abstand M erhobenen Eingangswerten zu erkennen. Dies wird oft als Differenzierer bezeichnet. Hierzu wird ein M langes Schieberegister benötigt, da der negative Exponent von z die Anzahl von Signalverzögerungen in f_s Takten beschreibt. Das Eingangssignal dieses Schieberegisters ist mit +1 zu multiplizieren, das Ausgangssignal mit -1 und das Ergebnis zu addieren. Dies lässt sich am einfachsten mit einer „look up table“ (LUT) bewerkstelligen. Es ist allerdings zu beachten, dass das $\Sigma\Delta$ Ausgangssignal mit high = +1 und low = -1 zu interpretieren ist, um Zweierkomplementdarstellung zu erlangen. Der LUT Ausgang kann somit die Werte -2, 0 oder +2 annehmen was mit 3Bit dargestellt werden kann.

Der zweite Term von (2) stellt einen Integrierer oder verlustfreien Akkumulator dar, siehe Abschnitt IIR Tiefpassfilter. Weil dieses Filter eine DC-Verstärkung von $a_{DC} = M$ besitzt muss die Ausgangswortbreite t als natürliche Zahl zu

$$t \geq \frac{\lg(2M + 1)}{\lg 2} \quad (3)$$

gewählt werden. Dieses Filter kann somit, wie in Fig. 02 dargestellt, implementiert werden. Besondere Aufmerksamkeit ist noch der Anfangsbedingung zu widmen, da der Akkumulator praktisch nichts vergisst. Davon ausgehend, dieser wird Anfangs zu Null gesetzt, was der Signalmitte in Zweierkomplementdarstellung entspricht, muss auch das Schieberegister auf Signalmitte zu Anfangs vorbelegt werden. Diese wäre hier allerdings durch eine high, low, high, low, ... Folge des $\Sigma\Delta$ repräsentiert. Die Schieberegisterzellen müssen also abwechselnd mit high und low zu Anfangs vorbelegt werden. Oder mindestens die eine Hälfte der Zellen mit high die andere Hälfte mit low.

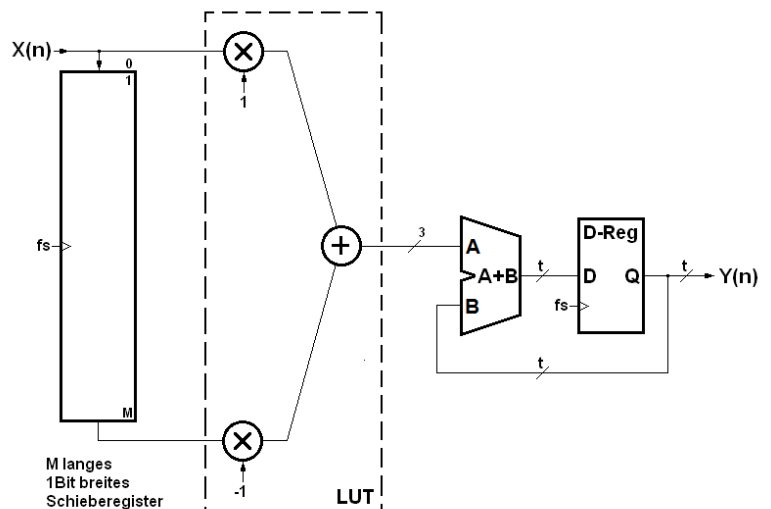
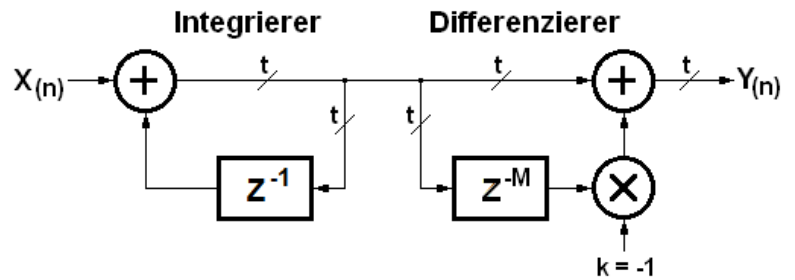


Fig. 02
Blockschaltbild SINC-Filter erster Ordnung mit Differenzierer und Integrierer.

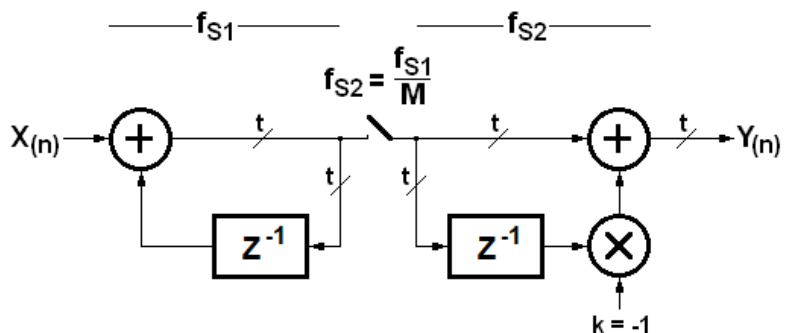
Eine vertauschte Reihenfolge der beiden Terme aus (2) wie in Fig. 03 zu sehen scheint nachteilig, da der Aufwand zunächst offensichtlich steigt. Das M lange Schieberegister muss jetzt auch noch t Bit breit ausgelegt werden.

Fig. 03
SINC-Filter erster Ordnung mit Integrierer und Differenzierer



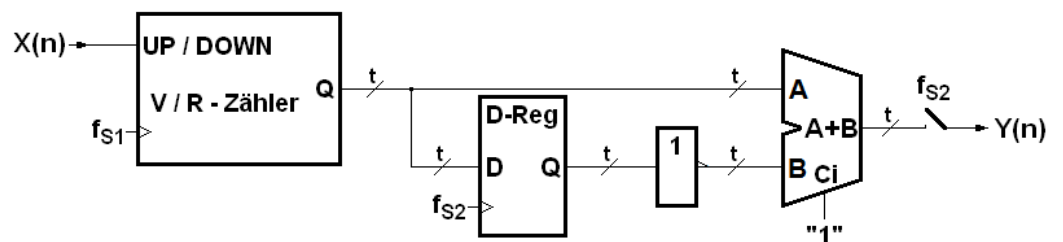
Dieser Aufwand kann deutlich verringert werden, wenn man die ohnehin zu benutzende Reduzierung der Abtastrate mit einbaut, wie in Fig. 04 dargestellt. Dadurch beträgt die Signalverzögerung im Differenzierer nur noch einen f_{s2} Takt, was somit durch ein t Bit breites D-Register realisiert werden kann.

Fig. 04
SINC-Filter erster Ordnung mit Integrierer, Abtastreduzierung und Differenzierer.



Die Implementierung hierzu ist in Fig. 05 zu sehen. Der Akkumulator kann hier wiederum mit einem t Bit breiten Vorwärts- Rückwärtszähler realisiert werden. Dieser besitzt hier kein Rücksetzsignal (CLR) und läuft bei einem DC-Eingangssignal somit kontinuierlich über. Dies wird aber durch die nachfolgende Differenzbildung zweier Abtastwerte egalisiert, sodass bei einem konstanten Eingangssignal auch ein konstanter Ausgangswert ausgegeben wird.

Fig. 05
Blockschaltbild SINC-Filter erster Ordnung mit Integrierer, Abtastreduzierung und Differenzierer.



Dies wird als Pol-Nullstellen-Kompensation bezeichnet und trifft nicht nur für Fig. 05 sondern auch für Fig. 02 zu. In beiden Anordnungen wird bei einem konstanten Eingangssignal von „1“ dies als konstanter Wert von „M“ ausgegeben. Für die Wortbreite t gilt hier ebenfalls die Beziehung (3).

Mit der Auswertung von (1) am Einheitskreis $z = e^{j\omega}$ und der Festlegung, dass ω hier die auf die Abtastfrequenz f_s normierte Kreisfrequenz darstellt, wird daraus

$$H_{(j\omega)} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} \quad \text{und es gilt} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s} .$$

Per Betragsbildung hierzu kann der Amplitudengang $|H_{(j\omega)}|$ bestimmt werden, wobei sich der Betrag einer komplexen Zahl als Quadratwurzel aus komplexer Zahl mal konjugiert komplexer Zahl berechnen lässt.

$$|H_{(j\omega)}| = \sqrt{\frac{(1 - e^{-j\omega M}) \cdot (1 - e^{j\omega M})}{(1 - e^{-j\omega}) \cdot (1 - e^{j\omega})}} \quad \text{ausmultipliziert wird daraus}$$

$$|H_{(j\omega)}| = \sqrt{\frac{1 - e^{j\omega M} - e^{-j\omega M} + 1}{1 - e^{j\omega} - e^{-j\omega} + 1}} .$$

Mit der Euler Formel $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ wird daraus

$$|H_{(j\omega)}| = \sqrt{\frac{2 - (\cos \omega M + j \sin \omega M) - (\cos \omega M - j \sin \omega M)}{2 - (\cos \omega + j \sin \omega) - (\cos \omega - j \sin \omega)}} .$$

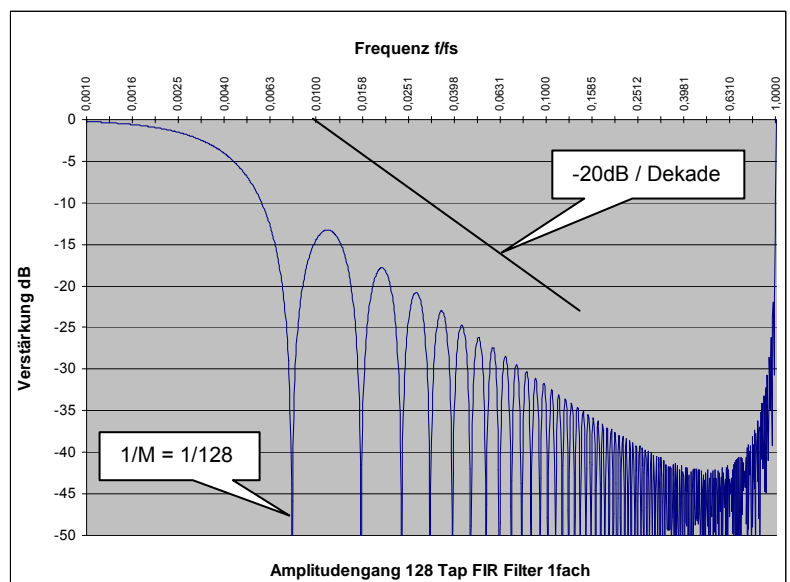
Auflösen der Klammern und kürzen ergibt

$$|H_{(j\omega)}| = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega M}{1 - \cos \omega}} . \quad (4)$$

Der Phasengang ist oftmals irrelevant und soll deshalb hier nicht bestimmt werden.

In Fig. 06 ist der Graph in doppelt logarithmischer Darstellung zu diesem Amplitudengang mit $M = 128$ zu sehen, wobei die Amplitude auf 1 normiert wurde. Normalerweise hat dieses Filter eine DC-Verstärkung von $a_{DC} = M$.

Fig. 06
Graph zum Term (4).



Mit der goniometrischen Beziehung [3]

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{kann (4) auch als}$$

$$|H_{(j\omega)}| = \left| \frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right| \quad \text{ausgedrückt werden.}$$

Wird jetzt noch der normierte Kardinalsinus sinc [4]

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

zusammen mit der normierten Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s}$ eingesetzt, ergibt sich daraus

$$|H_{(j\omega)}| = \left| \frac{M \cdot \text{sinc}\left(M \frac{f}{f_s}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{f}{f_s}\right)} \right|, \quad (5)$$

weshalb ein solches Filter auch oftmals als SINC-Filter [5] bezeichnet wird, oder auch weil die Funktion $|\text{sinc}(x)/x|$ große Ähnlichkeit zum Graph aus Fig. 06 besitzt, wenn hier x zu $M \cdot \pi \cdot f/f_s$ gewählt wird.

Der Vorteil dieses Filters liegt in Anwendungen höherer Ordnung. Das Filter erster Ordnung fällt mit ca. 20dB pro Dekade. Dies ist in vielen Fällen nicht ausreichend, weshalb es mehrfach hintereinander eingesetzt wird. In dritter Ordnung ergibt sich aus (1)

$$H_{3(z)} = \left(\frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}} \right)^3 = (1 - z^{-M}) \cdot (1 - z^{-M}) \cdot (1 - z^{-M}) \cdot \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right)^3,$$

$$H_{3(z)} = (1 - 3z^{-M} + 3z^{-2M} - z^{-3M}) \cdot \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right)^3. \quad (6)$$

Im ersten Term aus (6) ist ein 3M langes Schieberegister zu erkennen. Dieses benötigt bei Länge M und 2M jeweils einen zusätzlichen Ausgang. Das Signal am Ausgang M ist dann mit -3 das am Ausgang 2M mit +3 zu multiplizieren. Das Signal am Schieberegister Eingang entsprechend mit +1 das am Ausgang 3M mit -1. Der zweite Term aus (6) stellt einen verlustfreien Akkumulator in dreifacher Anordnung dar. Dieses Filter lässt sich somit, wie in Fig. 07 dargestellt, implementieren.

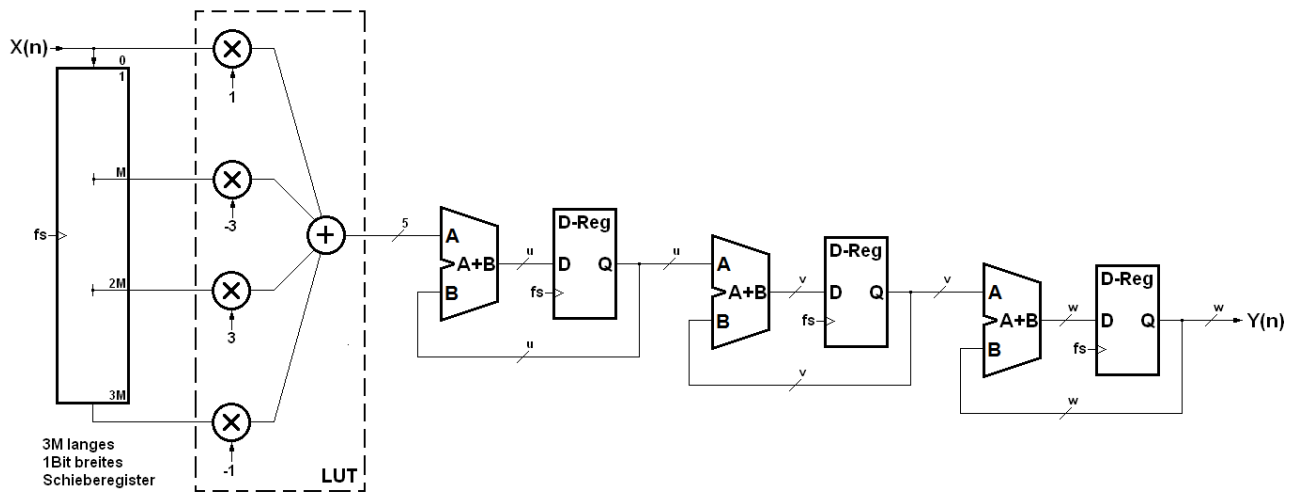
Die 4 Eingänge der LUT können jeweils unabhängig den Wert +1 oder -1 annehmen. Der Ausgang der LUT somit den Wert -8, -6, -4, -2, 0, +2, +4, +6 oder +8 was mit 5Bit dargestellt werden kann. Unglücklicherweise ist hier das Signalmaximum von +8 um Eins zu groß, als dass eine um 1Bit kleinere Wortbreite ausreichend wäre. Dieser Umstand gilt auch für die drei nachfolgenden Akkumulatoren, was bedeutet, dass die Wortbreite jeweils ineffizient ausgenutzt ist.

Die Wortbreiten u , v und w ergeben sich jeweils als natürliche Zahl zu

$$u \geq \frac{\lg(8M + 1)}{\lg 2}, \quad v \geq \frac{\lg(4M^2 + 1)}{\lg 2}, \quad w \geq \frac{\lg(2M^3 + 1)}{\lg 2}. \quad (7), (8), (9)$$

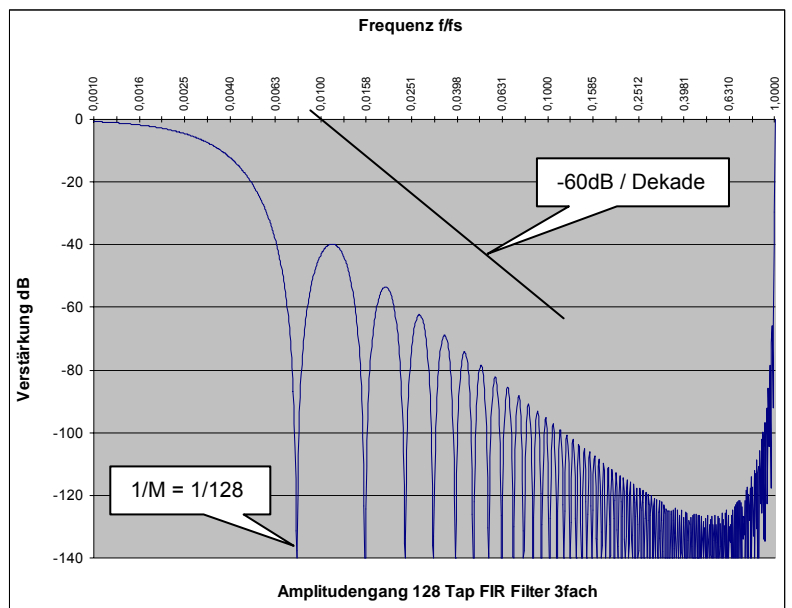
Mit $M = 128$ muss somit die Ausgangswortbreite $w = 23$ Bit breit sein. Auch hier ist das Schieberegister analog zum Filter erster Ordnung vorzubeseetzen.

Fig. 07
 Blockschaltbild SINC-Filter dritter Ordnung.



In Fig. 08 ist der Amplitudengang, in doppelt logarithmischer Darstellung, zu diesem Filter für $M=128$ zu sehen. Wobei auch hier wiederum die Amplitude auf 1 normiert wurde. Normalerweise besitzt dieses Filter eine DC-Verstärkung von $a_{DC} = M^3$.

Fig. 08
 Amplitudengang zu Fig. 07.



IIR Tiefpassfilter

Ein einfaches IIR Filter besteht aus einem Addierer und einer Signalverzögerung, wie in Fig. 09 zu sehen. Ein solches Filter addiert den neuen Eingangswert $X(n)$ zur alten Summe $Y(n-1)$. Das aktuelle Ausgangssignal besteht deshalb immer aus der Summe aller je aufgelaufener Eingangswerte. Diese werden somit verlustfrei aufaddiert oder akkumuliert. Das kann somit auch als idealer Integrator bezeichnet werden. Genau hier liegt aber auch das Problem, da bei einem gleichbleibenden Eingangssignal (DC) das Ausgangssignal kontinuierlich ansteigt, bis es aufgrund endlicher Wortlängen überläuft und somit verfälscht wird. Die Anwendung solcher Akkumulatoren ist deshalb etwas eingeschränkt.

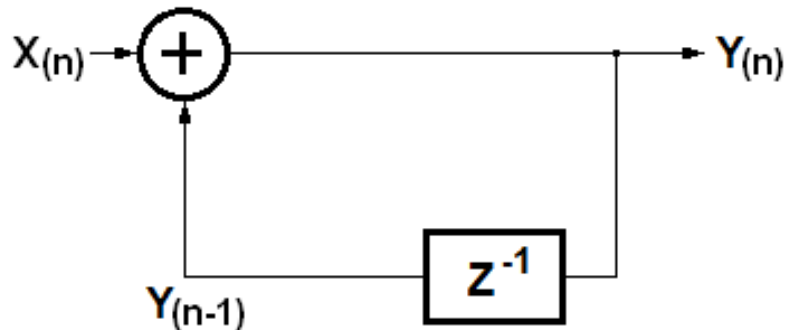


Fig. 09
Digitaler Akkumulator.

Zwischen Ausgang und Eingang besteht im Zeitbereich folgender Zusammenhang:

$$Y_{(n)} = X_{(n)} + Y_{(n-1)} .$$

Durch Anwendung der z-Transformation wird daraus.

$$Z\{Y_{(n)}\} = Z\{X_{(n)}\} + Z\{Y_{(n-1)}\} ,$$

$$Z\{Y_{(n)}\} = Z\{X_{(n)}\} + z^{-1} \cdot Z\{Y_{(n)}\} ,$$

$$Z\{Y_{(n)}\} - z^{-1} \cdot Z\{Y_{(n)}\} = Z\{X_{(n)}\} ,$$

$$Z\{Y_{(n)}\} \cdot \langle 1 - z^{-1} \rangle = Z\{X_{(n)}\} ,$$

$$H_{(z)} = \frac{Z\{Y_{(n)}\}}{Z\{X_{(n)}\}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} . \quad (10)$$

Das Problem der verlustfreien Akkumulation kann umgangen werden, indem die alte Summe etwas verkleinert zum neuen Eingangswert addiert wird. Hierzu muss ein Multiplizierer mit einem Multiplikationsfaktor $k < 1$, wie in Fig. 10 zu sehen, eingebaut werden.

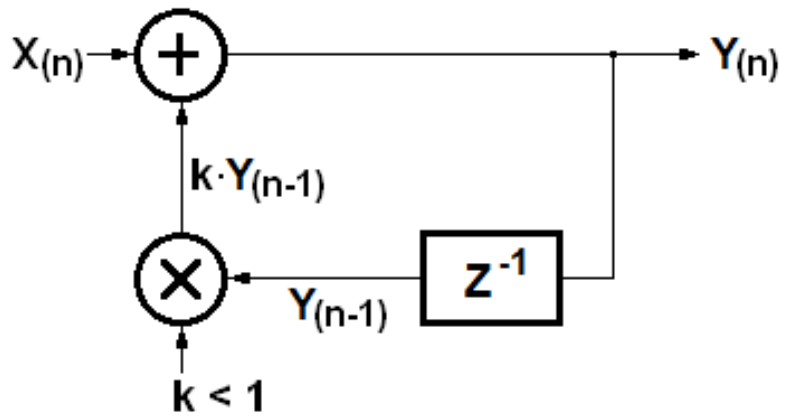


Fig. 10
Verlustiger Akkumulator.

Zwischen Ausgang und Eingang besteht im Zeitbereich dann folgender Zusammenhang:

$$Y_{(n)} = X_{(n)} + k \cdot Y_{(n-1)}$$

und mit der Anwendung der z-Transformation wird letztendlich daraus

$$H_{(z)} = \frac{Z\{Y_{(n)}\}}{Z\{X_{(n)}\}} = \frac{1}{1 - k \cdot z^{-1}} \quad (11)$$

Um eine echte Multiplikation zu umgehen, wird diese auf eine Addition und eine Binärstellenverschiebung zurückgeführt, wie in Fig. 11 zu sehen. Dadurch kann k jetzt allerdings nicht mehr beliebige Werte annehmen sondern nur die in Tab. 01 gezeigten und deren Folgende.

In der Praxis ist mit diesen wenigen Werten aber oftmals auszukommen. Für $m = 1$ also $k = 0,5$ kann Fig. 11 noch etwas vereinfacht werden. Der Ausgang des Verzögerungsgliedes wird um eine Stelle versetzt direkt zum Eingangssignal addiert. Für den eingeschwungenen Zustand, bei einem konstanten Eingangssignal (DC), ist die Signalverzögerung unerheblich und es wird

$$Y = X + k \cdot Y \quad X = \text{konstant (DC)} \quad \text{Division mit Y ergibt:}$$

$$\frac{Y}{X} = a_{DC} = \frac{1}{1 - k} \quad \text{mit} \quad k = 1 - \frac{1}{2^m} \quad \text{wird daraus}$$

$$a_{DC} = 2^m \quad (12)$$

Bei größeren m , somit k -Werten nahe 1, bedeutet dies eine große DC-Verstärkung.

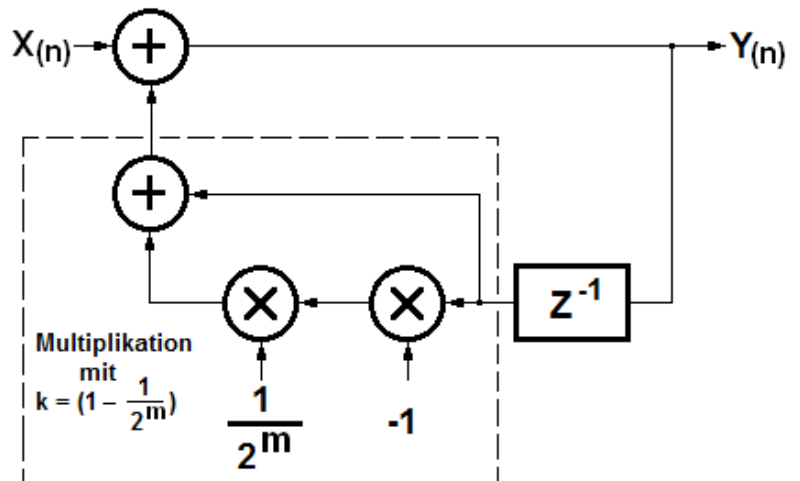


Fig. 11
Multiplikation per Addition und Stellenverschiebung.

Mit der Auswertung von (11) am Einheitskreis $z = e^{j\omega}$ und der Festlegung, dass ω hier die auf die Abtastfrequenz f_s normierte Kreisfrequenz darstellt, wird daraus

$$H_{(j\omega)} = \frac{1}{1 - k \cdot e^{-j\omega}} \quad \text{und es gilt hierbei} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s} .$$

Per Betragsbildung hierzu kann der Amplitudengang $|H_{(j\omega)}|$ bestimmt werden.

$$|H_{(j\omega)}| = \sqrt{\frac{1}{(1 - k \cdot e^{-j\omega})} \cdot \frac{1}{(1 - k \cdot e^{j\omega})}} \quad \text{ausmultipliziert wird daraus}$$

$$|H_{(j\omega)}| = \frac{1}{\sqrt{1 - k \cdot e^{j\omega} - k \cdot e^{-j\omega} + k^2}} ,$$

$$|H_{(j\omega)}| = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - k \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega})}} .$$

Mit der Euler Formel $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ ergibt sich:

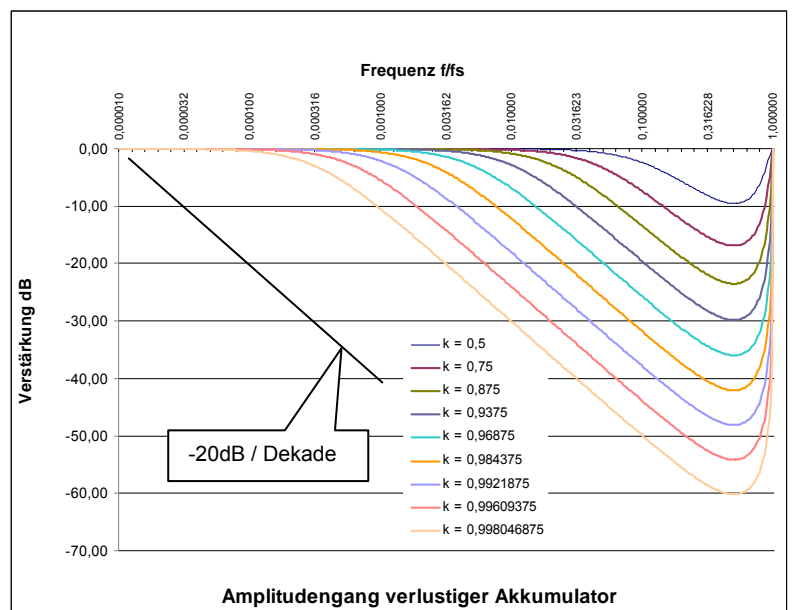
$$|H_{(j\omega)}| = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - k \cdot (\cos \omega + j \sin \omega + \cos \omega - j \sin \omega)}} .$$

Auflösen der Klammern und kürzen ergibt

$$|H_{(j\omega)}| = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - 2 \cdot k \cdot \cos \omega}} . \quad (13)$$

In Fig. 13 ist der Graph in doppelt logarithmischer Darstellung zu diesem Amplitudengang für einige k zu sehen, wobei die Amplitude jeweils auf 1 normiert wurde.

Fig. 13
Graph zum Term (13).



- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Z-Transformation>
- [2] https://de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung_Mathematik:_Endliche_Reihen#1_Summe_der_linearen_Reihe_28Gau.C3.9Fsche_Summenformel.29
- [3] Bartsch, Taschenbuch Mathematischer Formeln, Harri Deutsch, ISBN 3 87144 774 9
- [4] <https://de.wikipedia.org/wiki/Sinc-Funktion>
- [5] https://www.ieee.li/pdf/essay/calculating_delta-sigma_snr.pdf

Der Autor,

Guido Nopper wurde 1957 in Furtwangen im Schwarzwald geboren. Er erhielt 1981 den Dipl. Ing. (FH) Abschluss von der Hochschule Furtwangen University und arbeitete dann 1981 bis 1984 als LSI-MOS-design Ingenieur mit Schwerpunkt A/D-Wandler und digitale Filter. Seit 1984 ist er verantwortlich für das gesamte Hardware Design papierverarbeitender Büromaschinen insbesondere Scheck Druckern und Scannern.

